**Διάλεξη 4η : Πέμπτη 17 Μάρτη 2016, 6-9 μ.μ.**

# ΣΥΝΤΟΜΗ ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΗΣ ΔΙΑΛΕΞΗΣ

**Ορισμοί.**

**(i)** Για $a \in \Re$, η συνάρτηση $H_a : \Re \to \{0, 1\}$ με

$$H_a(t) := \begin{cases} 0, & t < a \\ 1, & a \le t, \end{cases}$$

καλείται *συνάρτηση μοναδιαίου βήματος*.

**(ii)** Για $S \subset \Re$, η συνάρτηση

$$\chi_S(t) := \begin{cases} 1, & t \in S \\ 0, & t \in S^c, \end{cases}$$

καλείται *χαρακτηριστική συνάρτηση* (του συνόλου $S$).

**(iii)** Η συνάρτηση

$$H(t) := \begin{cases} 0, & t < 0 \\ 1/2, & t = 0 \\ 1 & t > 0. \end{cases}$$

καλείται συνάρτηση *Heaviside*.

**Σχόλια - Παραδείγματα**

**ΠΡΟΤΑΣΗ 4.1**

**(i)** Ο μετασχηματισμός Laplace της συνάρτησης $H_a$ είναι

$$\mathcal{L}(H_a)(s) = \frac{1}{s} e^{-sa}, \quad s > 0.$$

**(ii)** Για τούς μετασχηματισμούς Laplace των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των διαστημάτων $[a, b], (a, b], (a, b), [a, b)$, $(-\infty < a < b < \infty)$ έχουμε

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,b]}](s) = \mathcal{L}(\chi_{(a,b]})(s) = \mathcal{L}[\chi_{(a,b)}](s) = \mathcal{L}(\chi_{[a,b)})(s) = \frac{e^{-sa} - e^{-sb}}{s}, \quad s > 0.$$

**(iii)** Για τούς μετασχηματισμούς Laplace των χαρακτηριστικών συναρτήσεων των συνόλων $[a, \infty), (a, \infty), (a \in \Re)$ έχουμε

$$\mathcal{L}[\chi_{[a,\infty)}](s) = \mathcal{L}[\chi_{(a,\infty)}](s) = \mathcal{L}[H_a](s) = \frac{1}{s} e^{-sa}, \quad s > 0.$$

**Απόδειξη.**

**Παρατηρήσεις - Παραδείγματα**

**ΠΡΟΤΑΣΗ 4.2** Αν $a > 0$ είναι μία πραγματική σταθερά και $f : [0, \infty) \to \Re$ πραγματική συνάρτηση της οποίας ο μετασχηματισμός Laplace ορίζεται για όλα τα $s > s_0$, τότε η συνάρτηση

$$f_a(x) := \begin{cases} 0, & 0 \le t < a, \\ f(t-a), & a \le t. \end{cases}$$

μετασχηματίζεται κατά Laplace και είναι

$$\mathcal{L}[f_a](s) = e^{-as}\mathcal{L}[f](s), \quad s > s_0.$$

**Απόδειξη.**

**Παρατηρήσεις - Παραδείγματα**

**ΘΕΩΡΗΜΑ 4.3** (Lerch) Αν $f, g :\to [0, \infty)$ είναι δύο κατά τμήματα συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες οι $L[f] = L[g]$ ορίζονται για $s > s_0$ και είναι

$$L[f](s) = L[g](s), \quad s > s_0,$$

τότε θα είναι $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \geq 0$ στα οποία οι $f, g$ είναι συνεχείς.
**Απόδειξη.** ΟΧΙ

**ΠΟΡΙΣΜΑ 4.3.α** Αν $f, g$ είναι συνεχείς συναρτήσεις για τις οποίες οι $L[f] = L[g]$ ορίζονται για $s > s_0$ και είναι

$$\mathcal{L}[f](s) = \mathcal{L}[g](s), \quad s > s_0,$$

τότε θα είναι $f(x) = g(x)$ για όλα τα $x \geq 0$.

**Σχόλια - Παραδείγματα**

**1ο TEST**